BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (4 points)

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60% des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les Jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision.
- Parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les événements suivants :

- J : « la personne choisie a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision »
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière »

On note $\bar{J}$ et $\bar{S}$ leurs événements contraires respectifs.
Dans les questions **1.** *et* **2.**, *les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.*

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{8}{15}$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
b. En déduire la probabilité de S sachant $\bar{J}$ notée $P_{\bar{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.
On assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière.
c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.
Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.
Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

Exercice 2. (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

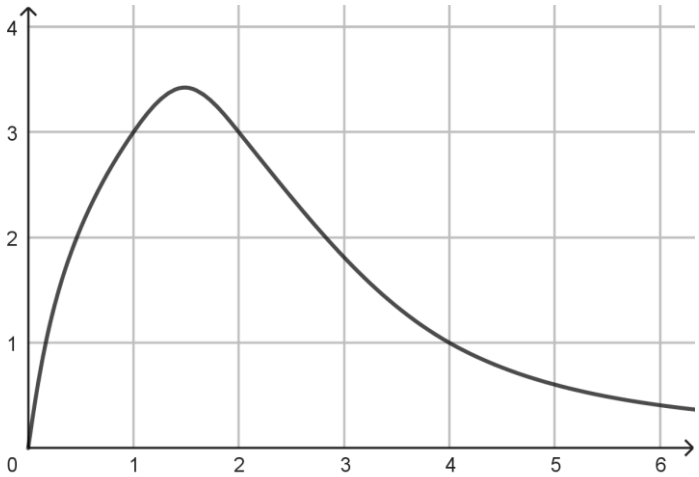
A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \frac{7}{3}$

D. $f(x) = \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \frac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ est :

A. $0 \leq I \leq 4$

B. $1 \leq I \leq 5$

C. $5 \leq I \leq 10$

D. $10 \leq I \leq 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2\ln(x^2 + 4)$.

Alors $\int_0^2 g'(x)\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9

B. 8,3

C. 1,7

D. 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5

B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$

C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$

D. $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$

B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$

C. $\binom{20}{3}$

D. $20^3 \times 11^2$

Exercice 3. (6 points)

On considère la suite (u_n), définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. a. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k):
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k):
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S
```

L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6 :



Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0 ; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite.

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4. (5 points)

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2; 5; 1)$.

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathcal{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points $A(-1; -1; 17)$, $B(4; -2; 4)$ et $C(1; -3; 7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2.

a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x - 3y + z - 18 = 0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

a. Déterminer un vecteur directeur de droite d.

b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathcal{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathcal{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathcal{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$. On admet que le point $F(6; -1; 3)$ correspond à cet emplacement.
Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan $\mathcal{P}$ (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D. Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 $m.s^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?