BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2.

a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.

Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.

Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.

Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2.

a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

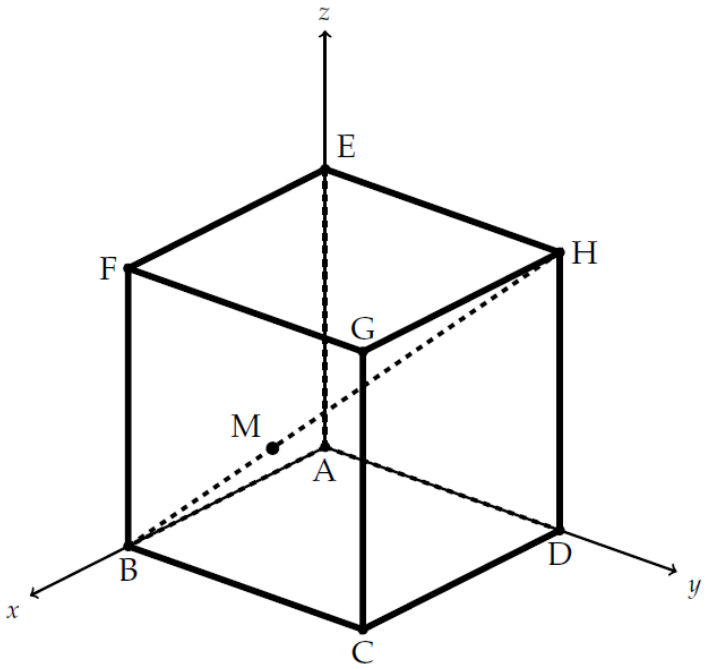
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2.

a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

4.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).

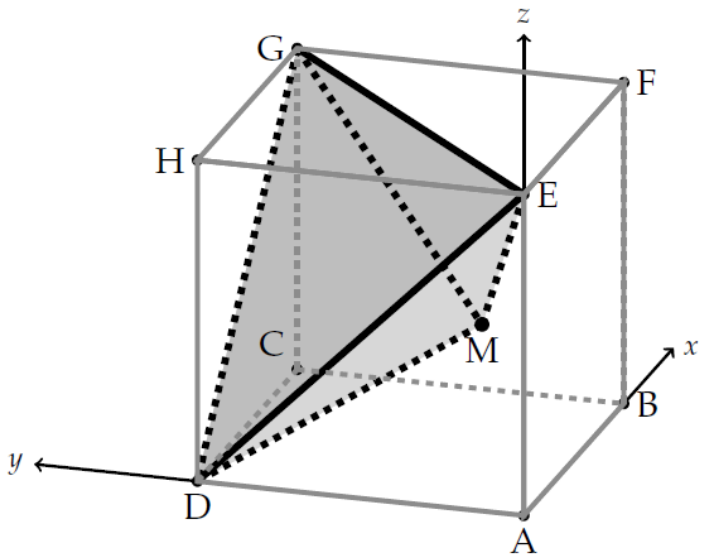
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

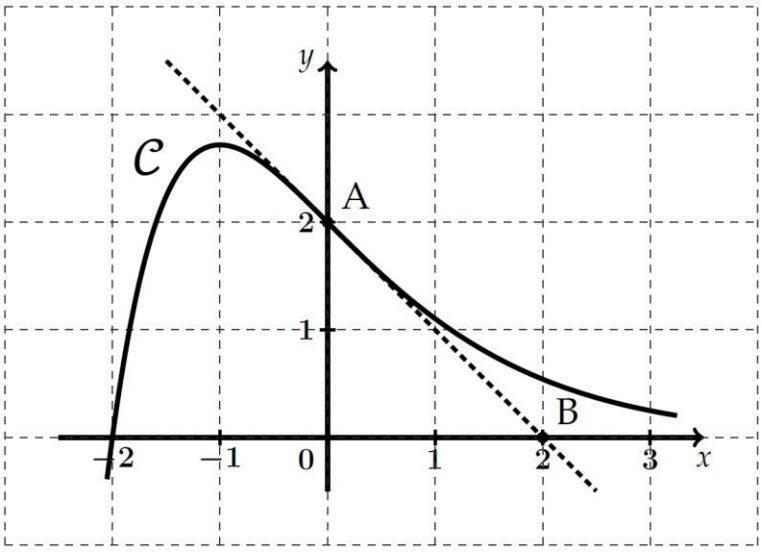
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles.

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur **R** :



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle $y' = -y + \mathrm{e}^{-x}$.

On admet que $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.

2. En déduire toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E).

3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur **R**.

On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.

On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur **R**.

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

a. Calculer pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x)$.

b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$?

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation.

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1 ; 4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3.

a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.